

دفترچه شماره ۱



کد مدرسه

آزمون

۹

پایه

۱۲



مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۱/۱۹

آزمون اختصاصی گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

مدت پاسخ‌گویی: ۷۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۰

عنوان مواد امتحانی آزمون اختصاصی گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره | مدت پاسخ‌گویی |
|------|--------------|------------|----------|----------|---------------|
| ۱ | حسابان | ۱۸ | ۱ | ۱۸ | ۳۰ دقیقه |
| ۲ | هندسه | ۱۲ | ۱۹ | ۳۰ | ۲۱ دقیقه |
| ۳ | گسسته | ۱۰ | ۳۱ | ۴۰ | ۱۹ دقیقه |

| مواد امتحانی | سرفصل دهم | سرفصل یازدهم | سرفصل دوازدهم |
|--------------|-----------------------|-----------------------|--|
| حسابان | - | - | فصل ۴ (از ابتدای مشتق تا بعد مرکب صفحه ۹۶ تا انتهای فصل) و فصل ۵ (تا ابتدای بهینه‌سازی صفحه ۱۱۷) |
| هندسه | - | فصل ۳ (درس‌های ۱ و ۲) | فصل ۳ (درس ۱) |
| گسسته | فصل ۷ (درس ۱: احتمال) | فصل ۲ (درس‌های ۱ و ۲) | فصل ۳ (درس ۱) |

تمامی حقوق مادی و معنوی آزمون، متعلق به مرکز سنجش آموزش مدارس برتر بوده و هرگونه استفاده از آن بدون داشتن اجازه‌نامه کتبی از این مرکز، خلاف قانون و عرف و قابل پیگیری می‌باشد.

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴

۱- اگر $f(x) = 2x^2 + ax + b$ به طوری که $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x) - 3f(x)}{x^2 - x} = 2$ مقدار $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲- دو تابع $f(x) = x\sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + ax + b$ در نقطه‌ای به طول $x = 4$ بر هم مماس‌اند، مقدار $g(2)$ چه عددی است؟

- (۱) ۶ (۲) ۴

- (۳) ۸ (۴) ۹

۳- اگر $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ و $g(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2$ مقدار $f'(g) \cdot g'(f)$ چه عددی است؟

- (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) ۱

۴- هرگاه $f(x) = \sqrt{\tan \frac{\pi}{2\sqrt{x+3}}}$ مقدار $f'(1)$ چه عددی است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{64}$ (۲) $\frac{\pi}{16}$

- (۳) $\frac{\pi}{64}$ (۴) $-\frac{\pi}{16}$

۵- اگر $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2ax + a$ به طوری که باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $p''(x)$ برابر -5 باشد، مقدار a چه عددی است؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) ۱

۶- اگر $f(x) = 3x + 2\sqrt{2x+1}$ و $f(2x) = xg(3x) + 4x + 1$ و g تابعی بی‌وسه و مشتق پذیر باشد، مقدار $g(0)$ چه عددی است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶

- (۳) ۳ (۴) ۲

۷- خطی که در نقطه‌ای به طول α در ناحیه اول بر منحنی $f(x) = 3 - \frac{6}{x}$ مماس می‌شود از مبدأ مختصات عبور می‌کند. مقدار α کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶

- (۳) ۸ (۴) ۳

۸- اگر $f(x) = (\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)$ به طوری که $f''(1) = \frac{1}{30}$ مقدار طبیعی n کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۲۰ (۴) ۴۰

۹- هرگاه $f(x) = 4\sqrt{x} + 3g^3(x)$ و $f'(1) = g(1) = 2$ و $f''(1) = 1$ باشد، مقدار $g''(1)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۳۵

۱۰- $f(x) = \frac{1}{\pi}x^2 + \sin x$ و $g(x) = \frac{1}{\pi}x^2 + \cos x$ مشتق $f \circ g'$ در $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{\pi} - 1$ (۲) $\frac{2}{\pi}$
(۳) $\frac{2}{\pi} + 1$ (۴) $\frac{4}{\pi}$

۱۱- خط $y = x + 2$ در نقطه‌ای به طول ۱- بر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax}{2x+b}$ مماس است. مقدار a چه عددی است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۲- با فرض $f(x) = x^3 + ax - a$ هرگاه مشتق تابع $y = f' \circ f(x)$ به ازای $x = 1$ برابر ۱۲ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) ۴

۱۳- اگر $f(x) = 2 - \frac{x}{4}$ و $g(x) = 2x^2 - x$ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $g \circ f$ در نقطه‌ای به طول α با آهنگ تغییر متوسط تابع $f \circ g$ در بازه $[-2, 4]$ برابر است. α کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{1}{2}$
(۳) ۶ (۴) ۲

۱۴- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = 2x - \sqrt{x}$ در بازه $[1, a]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x = 4$ برابر است. مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{6}$ (۲) $\frac{23}{6}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{7}{3}$

۱۵- تابع $f(x) = |x - x| |x|$ دارای چند نقطه بحرانی است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۶- هرگاه بیشترین مقدار تابع $f(x) = x + a\sqrt{2a - x}$ برابر ۱۲ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

محل انجام محاسبات

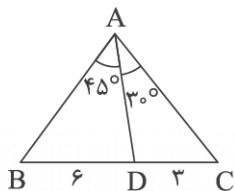
۱۷- حداقل مقدار تابع $f(x) = \sqrt{x}(x-32)$ چه عددی است؟

- (۱) -۲۴ (۲) -۴۸ (۳) -۳۲ (۴) -۳۶

۱۸- نسبت حداقل به حداکثر مقدار تابع $f(x) = x - 2\sqrt{5-x^2}$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $-2\sqrt{5}$ (۴) $-\sqrt{5}$

۱۹- در شکل زیر، نسبت $\frac{AB}{AC}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) ۲

۲۰- در مثلث $\triangle ABC$ ، $BC^2 = 20$ ، $AB^2 + AC^2 = 12$ و $\hat{A} = 120^\circ$ است. مجموع طول اضلاع AB و AC کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) $2\sqrt{7}$ (۴) $4\sqrt{2}$

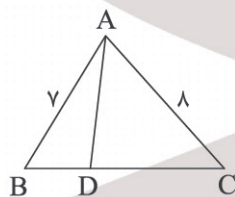
۲۱- در مثلث $\triangle ABC$ ، $AB = 2\sqrt{2}$ ، $AC = 6$ و $\hat{B} + \hat{C} = 45^\circ$ است. طول کوتاه‌ترین میانه این مثلث کدام است؟

- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) $\sqrt{5}$

۲۲- در مثلث $\triangle ABC$ ($\hat{B} = 90^\circ$)، مجموع مربعات طول سه میانه این مثلث برابر کدام است؟ ($BC = a$ ، $AC = b$ ، $AB = c$)

- (۱) $\frac{3}{2}a^2$ (۲) $\frac{3}{2}b^2$ (۳) $\frac{3}{2}c^2$ (۴) $\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

۲۳- در شکل زیر اگر $AD = CD = 2BD$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟



- (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) ۶

۲۴- دو نقطه $A = (2, -1, 3)$ و $B = (-1, 3, 1)$ دو رأس مقابل یک متوازی‌الاضلاع هستند. فاصله مرکز این متوازی‌الاضلاع از محور x ها برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{3}$

۲۵- در فضای \mathbb{R}^3 ، مجموعه نقاط محصور و واقع به صفحه‌های $x = -1, x = 4, y = 2, y = 5, z = -2$ و $z = 2$ را در نظر بگیرید. طول بزرگ‌ترین پاره‌خطی که دو نقطه از این مجموعه را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) $2\sqrt{10}$ (۴) $5\sqrt{2}$

۲۶- کدام گزینه در مورد هر سه نقطه $A = (1, -2, -3)$ ، $B = (1, -2, 4)$ و $C = (1, -2, 3)$ درست است؟

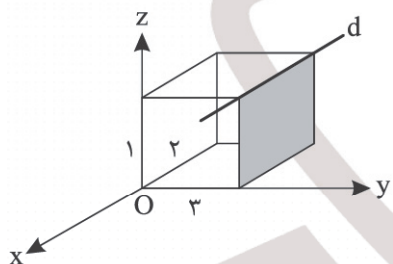
(۱) روی صفحه‌ای موازی صفحه YZ و به فاصله $\sqrt{5}$ واحد تا صفحه YZ قرار دارند.

(۲) روی خطی موازی محور OZ به فاصله $\sqrt{5}$ تا محور OZ قرار دارند.

(۳) روی صفحه‌ای موازی صفحه XY و به فاصله ۲ واحد تا صفحه XY قرار دارند.

(۴) روی خطی عمود بر صفحه XY به فاصله $\sqrt{10}$ تا محور OZ قرار دارند.

۲۷- در مکعب مستطیل شکل زیر معادله خط d و معادله صفحه رنگی کدام است؟



(۱) صفحه: $\begin{cases} x = 3 \\ 1 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$ و $d: \begin{cases} x = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

(۲) صفحه: $\begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ y = 3 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$ و $d: \begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

(۳) صفحه: $\begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ y = 3 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$ و $d: \begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$

(۴) صفحه: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = -3 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$ و $d: \begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

۲۸- اگر نقطه O محل تلاقی قطرهای چهارضلعی $ABCD$ باشد، حاصل $\vec{AB} - \vec{AO} - \vec{CB} + \vec{CO}$ کدام است؟

- (۱) \vec{O} (۲) \vec{AC} (۳) \vec{CA} (۴) $2\vec{AC}$

محل انجام محاسبات

۲۹- نقاط $A = (2, 1, -1)$ و $B = (0, -4, -2)$ در فضای سه بعدی \mathbb{R}^3 مفروض اند. نقطه M روی پاره خط AB به گونه ای قرار دارد که

$$|\overline{AM}| = \frac{1}{3} |\overline{BM}|$$

است. در این صورت نقطه M در کدام ناحیه دستگاه مختصات فضایی قرار دارد؟

- (۱) ناحیه ششم (۲) ناحیه چهارم (۳) ناحیه پنجم (۴) ناحیه هشتم

۳۰- نقاط $(2, -1, 3)$ و $(3, a, b)$ و $(1, 2, -1)$ روی خط D قرار دارند. مقدار $2a + b$ برابر کدام است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۳

(۳) -۱۵ (۴) -۱

۳۱- علی، رضا و ۵ نفر از دوستانش می خواهند با هم عکس یادگاری بگیرند. با کدام احتمال بین علی و رضا دقیقاً ۲ نفر می ایستند؟

(۱) $\frac{3}{7}$ (۲) $\frac{4}{7}$ (۳) $\frac{4}{21}$ (۴) $\frac{5}{21}$

۳۲- عددی دورقمی به تصادف انتخاب می کنیم. با کدام احتمال این عدد بر ۶ بخش پذیر است یا بر ۸ بخش پذیر نیست؟

(۱) $\frac{1}{18}$ (۲) $\frac{5}{16}$

(۳) $\frac{83}{90}$ (۴) $\frac{7}{90}$

۳۳- A و B دو پیشامد از فضای نمونه S می باشند و $A \cup B$ پیشامد حتمی می باشد. اگر $P(A \cap B) = \frac{P(B')}{3} = \frac{P(A')}{2}$ ، حاصل

$P(A - B)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۳۴- فرض کنید $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ یک فضای غیرهم شانس باشد اگر $P(\{d\}) = \frac{1}{5} P(\{a, b, c, d\})$ و

$P(\{e, d, f\}) = \frac{1}{5} P(\{d\})$ باشد. حاصل $P(\{a, b, c\})$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{4}{11}$

(۳) $\frac{8}{11}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۳۵- تعداد جواب های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + 2x_3 = 40$ کدام است؟

(۱) ۳۶۱ (۲) ۲۲۵ (۳) ۱۹۰ (۴) ۲۷۱

۳۶- در بسط $(a + b + c + d)^{12}$ چند جمله وجود دارد که توان a ، ۲ باشد؟

(۱) ۴۵ (۲) ۶۶ (۳) ۳۶ (۴) ۵۵

محل انجام محاسبات

۳۷- در یک گل‌فروشی ۵ نوع گل رز و از هر کدام ۷ شاخه گل داریم. به چند روش می‌توان یک دسته گل ۸ شاخه‌ای انتخاب کرد؟

- ۴۹۰ (۱) ۴۹۵ (۲) ۲۱۶ (۳) ۴۵۹ (۴)

۳۸- مجموع کل درایه‌های یک مربع لاتین ۱۸ است. مجموع ۴ خانه در ۴ گوشه این مربع لاتین حداکثر چه عددی است؟

- ۹ (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴)

۳۹- اگر دو مربع لاتین و متعامد باشند، x کدام است؟

| | | | |
|---|-----|---|--|
| | | | |
| | ۲ | ۴ | |
| ۳ | x | | |
| | | | |

و

| | | | |
|---|---|--|--|
| | | | |
| ۳ | | | |
| | ۳ | | |
| | | | |

- ۴ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۰- می‌خواهیم برای رانندگی ۴ راننده در ۴ مسیر مختلف با ۴ ماشین مختلف و در ۴ روز اول هفته برنامه‌ریزی کنیم. برنامه‌ریزی باید طوری باشد که:

(الف) هر راننده در هر روز فقط در یک مسیر رانندگی کند.

(ب) هر راننده در هر روز فقط با یک ماشین رانندگی کند.

(ج) هر ماشین در هر مسیر فقط یکبار استفاده شود.

برنامه‌ریزی به فرم زیر انجام شده است:

→ چهار روز اول هفته

↓ رانندگان

| | | | | |
|-------|----|-----------------|-----------------|-----------------|
| D_1 | ۱۱ | | $\overline{3f}$ | $\overline{4e}$ |
| D_2 | | ۱۲ | $\overline{4d}$ | |
| D_3 | | $\overline{4c}$ | $\overline{1a}$ | |
| D_4 | ۴۳ | | | $\overline{1b}$ |

C

درایه سطر سوم و ستون چهارم مربع C کدام است؟

- ۳۲ (۱) ۲۴ (۲) ۲۱ (۳) ۳۳ (۴)